به نام زندگی

www.dr-haghbin.info/Courses/undergrad.

ahaghbin@gmail.com

معرفی مفاهیم پایه در احتمال مهندسی

* آزمایش تصادفی Experiment / trial

آزمایشی که یکی از نتایج $e_1, e_2, \dots, e_n$ منجر شود ولی نتیجه آن از قبل مشخص نیست

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب سکه

در آزمایش پرتاب سکه نتایج ممکن به صورت زیر است،

ξ_1 : شیر (H)

ξ_2 : خط (T)

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس ۶ وجهی که اعداد ۱ تا ۶ روی وجه‌هایش نوشته شده است.

نتایج ممکن این آزمایش تصادفی یکی از اعضای مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ است.

$$\{\underset{\xi_1}{1}, \underset{\xi_2}{2}, \dots, \underset{\xi_6}{6}\}$$

فضای نمونه Sample space (Ω)

فضای نمونه، مجموعه‌ای است شامل تمامی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی که آن را با

Ω نمایش می‌دهیم.

به طور مثال در آزمایش پرتاب سکه

فضای نمونه به صورت مقابل است.

$$\Omega = \{T, H\}$$

(شیر) (خط)

با در آزمایش پرتاب تاس، فضای نمونه به صورت زیر است،

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

فضای نمونه کران‌دار و گسسته

بدین ترتیب

* فضای نمونه Ω می‌تواند یک مجموعه محدود و یا نامحدود باشد (کران‌دار یا بی‌کران)

* فضای نمونه Ω می‌تواند یک مجموعه شمارش‌پذیر (Discrete) (گسسته) یا شمارش‌ناپذیر (Continuouse) (پیوسته) باشد.

* اگر آزمایش تصادفی، انتخاب یک عدد طبیعی باشد،

فضای نمونه بی‌کران و گسسته (شمارش‌پذیر)

$$\Omega \equiv \mathbb{N}$$

فضای نمونه

* اگر آزمایش تصادفی انتخاب یک عدد حقیقی باشد

فضای نمونه بی‌کران و پیوسته (شمارش‌ناپذیر)

$$\Omega \equiv \mathbb{R}$$

فضای نمونه

* آزمایش تصادفی اندازه‌گیری ولتاژ در سر یک مقاومت در یک مدار الکتریکی با کمک دستیار ولتاژ بین 8 تا 12 ولت.

$$\Omega = [8, 12]$$

فضای نمونه کران‌دار و پیوسته

فضای نمونه

* پیشامد Event (E)

در حالت کلی یک پیشامد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه (Ω) است.

$$E \subseteq \Omega$$

پیشامد

به این ترتیب منظور از رخداد یک پیشامد این است که نتیجه آزمایش تصادفی یکی از اعضای پیش آمد (مجموعه E) باشد.

به طور مثال، در آزمایش پرتاب تاس پیش آمد زوج بودن نتیجه آزمایش

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$

پیش آمد اینکه عدد ظاهر شده بزرگتر از 2 باشد،

$$E_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

یا در آزمایش انتخاب یک عدد طبیعی، پیش آمد اینکه عدد انتخاب شده، مضربی از 3 باشد

$$E_3 = \{3, 6, 9, \dots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

بنابراین توجه به این نکته لازم است که درک پیش آمدها، با مجموعه‌ها و عملگرهای حاکم بر آنها، سروکار خواهیم داشت. به همین جهت یک مرور کوتاه از نظریه مجموعه‌ها خواهیم داشت.

* مروری کوتاه بر نظریه مجموعه ها (Sets)

تعریف مجموعه (set) : یک مجموعه مانند A ، گروهی از اعضا را شامل می شود

محدود شمارش پذیر

$A_1 = \{1, T, \alpha, -2\}$

$A_3 = \{1, 3\}$

محدود شمارش ناپذیر

نامحدود شمارش پذیر

$A_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$

$A_3 = \{-1, -3, -5, \ldots\}$

به هر یک از اعضای یک مجموعه یک عنصر، المان یا عضو (element) می‌گوییم.

مجموعه‌ها نیز با توجه به اعضای آن‌ها می‌توانیم دسته‌بندی به صورت زیر را داشته باشیم

* یک مجموعه A ممکن است، محدود (کران‌دار، متناهی) یا نامحدود (بی‌کران، نامتناهی) باشد.

* یک مجموعه A ممکن است پیوسته (شمارش ناپذیر) یا گسسته (شمارش‌پذیر) باشد.

* مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم اگر هر عضوی از مجموعه A، عضوی از مجموعه B نیز باشد.

$$A \subseteq B$$

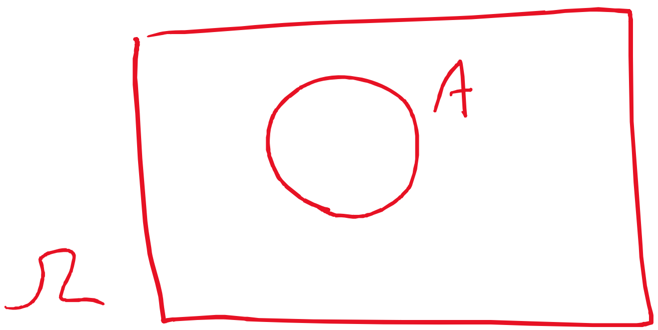
* دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوییم اگر اعضای دو مجموعه یکسان باشند.

$$A \subset B \quad \text{و} \quad B \subset A \iff A = B$$

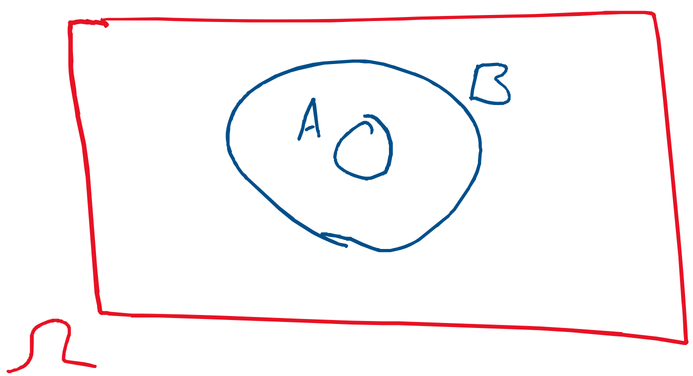
* مجموعه تمامی اعضای ممکن مجموعه های مورد نظر را با Ω نمایش می دهیم.

* مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی گوییم ϕ یا $\{\ \}$

* دیاگرام ون Ven Diagram در شناخت مفهوم مجموعه ها، کمک کننده است.



$A \subseteq B$



* مفهوم اجتماع دو مجموعه ی A ، B $\quad (A \cup B)$

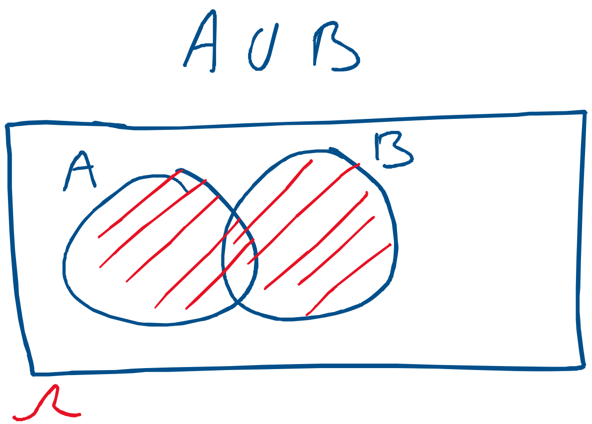
منظور از اجتماع دو مجموعه A ، B ، مجموعه‌ای است که اعضای آن یا عضو A هستند یا عضو B (یا هر دو)

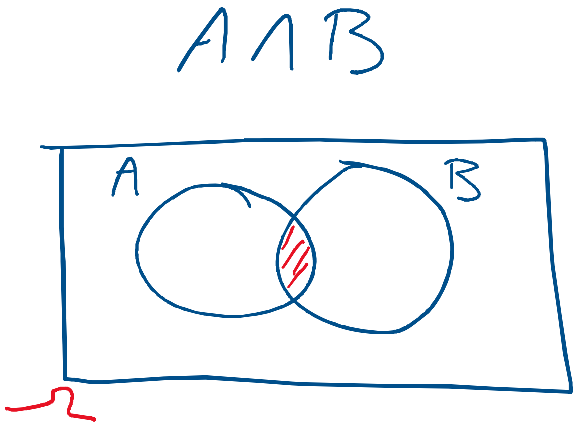
$A \cup B$ یا $A + B$

مفهوم اشتراک دو مجموعه A و B

منظور از اشتراک دو مجموعه ی A و B ، مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو A و هم عضو B هستند.

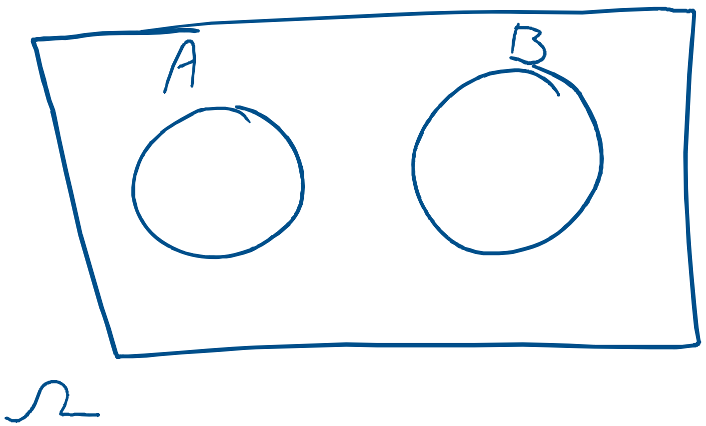
AB یا $A \cap B$





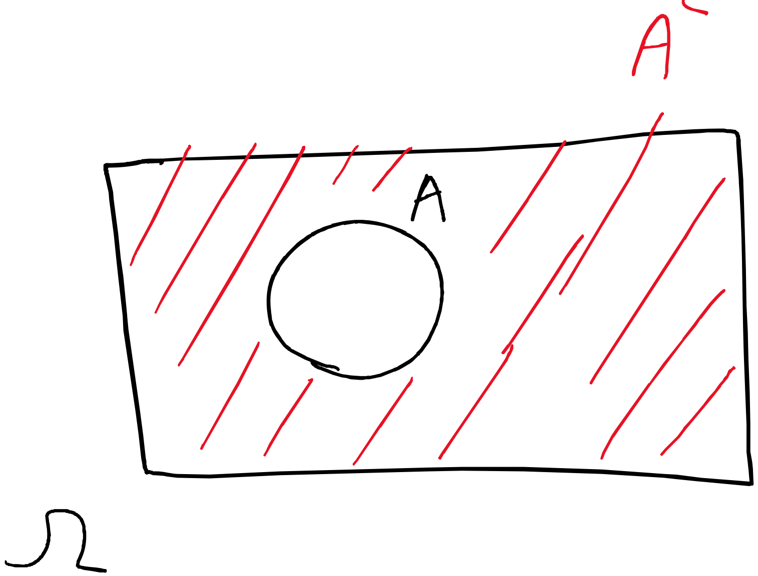
* دو مجموعه A و B را جدا از هم (Disjoint) می‌گوییم اگر هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

$$A \cap B = \emptyset$$



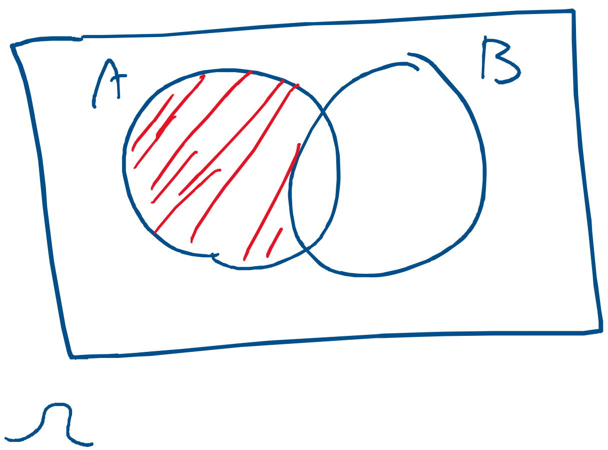
* متمم یا مکمل یک پیشامد A ، اعضای از Ω است که عضو A نباشند

A^c یا $\bar{A}$ (Complement)



* منظور از تفاضل دو مجموعه A و B $(A-B)$ مجموعه‌ای از اعضای A است
که عضو B نباشند.

$A-B$



$$A-B=A\cap\overline{B}$$

* مروری بر قوانین مجموعه‌ها

1) $A \cup \varphi = A \qquad A \cap \varphi = \varphi$

2) $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$

3) $A \subset B \,,\, B \subset A \iff A = B$

4) $A \cap B = B \cap A$

قانون جابه‌جایی

$A \cup B = B \cup A$

5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ قوانین شرکت پذیری

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ قوانین توزیع پذیری

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ قوانین دمورگان

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

---

* مجموعه‌های A_1 , A_2 , ... , A_n را روی هم فرسا (exhastive) می‌گوییم اگر اجتماع آنها برابر Ω باشد.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ یا $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ به طور خلاصه

* اگر مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، … ، A_n روی هم فضا را و دو به دو جدا از هم باشند

می‌گوییم مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، … ، A_n یک افراز از مجموعه Ω هستند

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

و

$$\forall i \neq j \quad ; \quad A_i \cap A_j = \Phi$$

$i, j \in 1, 2, \dots, n$

(Partition)

* ضرب دکارتی دو مجموعه A , B

$$C = A \times B = \{ (a_i , b_j) \mid a_i \in A , b_j \in B \}$$

$$i \in \{1, 2, \ldots, |A|\} , \quad j \in \{1, 2, \ldots, |B|\}$$

$|A|$ = تعداد اعضای مجموعه A

مثال: ضرب دکارتی دو مجموعه زیر را به دست بیاورید

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{H, T\}$$

$$A \times B = \{(1, H), (1, T), (2, H), (2, T), \dots, (6, H), (6, T)\}$$

* ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B \neq B \times A$$

$$|C| = |A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$$

* به دیدگاه احتمال، از ضرب دکارتی می‌توانیم برای به دست آوردن فضای نمونه‌ی مربوط به دو یا چند آزمایش تصادفی استفاده کنیم.

به طور مثال، در مثال قبل $C = A \times B$ فضای نمونه آزمایش پرتاب تاس و پرتاب سکه است (اول پرتاب تاس و بعد سکه)

با این مقدمه می‌خواهیم به بحث احتمال در مورد پیشامدها بپردازیم. در این زمینه با فضای احتمال سروکار داریم که یک فضای جبری (σ-field یا Borel_field) است.

هر یک فضای احتمال به صورت $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ در نظر گرفته می‌شود.

به عبارت دیگر فضای احتمال با سه جزء Ω و $\mathcal{E}$ و P مشخص می‌شود

Ω : فضای نمونه شامل تمامی نتایج ممکن آزمایش تصادفی است.

E : یک زیرمجموعه از Ω است که به آن پیشامد می‌گوییم.

$\mathcal{F}$: شامل تمامی پیشامدهای احتمال‌پذیر بر روی Ω در حالت کلی E یک Borel-set
(اجتماع و اشتراک‌های آنها)

P : یک عدد است که به هر پیشامد E نسبت داده می‌شود و به آن احتمال پیشامد
یا تابع احتمال پیشامد می‌گوییم.

فضای احتمال $\equiv (\Omega, \in, P)$ یا $(\Omega, E, P(\in))$

احتمال $P \equiv P(\in) \equiv P\{\in\} \equiv P_r\{\in\}$

پیش آمد $\in$

در صفحه‌های قبل با Ω و $\in$ در فضای احتمال آشنا شدیم.

در ادامه می‌خواهیم در مورد تابع احتمال یا P یا $P(\in)$ صحبت کنیم.

* پیش آمد غیرممکن: پیش آمدی است که احتمال رخداد آن برابر صفر است.

- مجموعه { } یک پیش آمد غیرممکن است.